

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a XII-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 x^4 \cos \frac{x}{n} dx$.
2. Determinați toate funcțiile derivabile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică condițiile $f \in \int g(x) dx$ și $g \in \int f(x) dx$.
3. a) (3p) În inelul matricelor $(M_4(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ considerăm matricea
$$A = \begin{pmatrix} 2020 & 582 & 860 & 870 \\ 1962 & 603 & 342 & 1011 \\ 3444 & 102 & 502 & 48 \\ 228 & 972 & 708 & 51 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,5}}.$$
 Fie $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{i,j \in \overline{1,5}}$ matricea A redusă modulo 5. Demonstrați că $\hat{A}$ este inversabilă și calculați inversa sa.
b) (4p) Fie $A = \{x^2 - xy + 4y^2 | x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}$. Demonstrați că A este grup abelian în raport cu înmulțirea numerelor.
4. Fie $A = \{f | f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continuă}\}$. Vom considera că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.
a) (3p) Demonstrați echivalența „ $f \in A$ este divizor al lui zero dacă și numai dacă există un interval nevid și deschis $I \subset [0; 1]$ pentru care $f(x) = 0, \forall x \in I$ ”.
b) (4p) În subinelul $B = \{f | f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ derivabilă}\}$ al lui A determinați o pereche de funcții $g, h \in B$, g, h neidentice nule astfel încât $g \cdot h = 0$.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ, 02.02.2020

CLASA a XII-a

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunț subiect 1, autor *Constantin Nicolau* GM 6-7-8/2019

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 x^4 \cos \frac{x}{n} dx$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\int_0^2 x^4 \cos \frac{x}{n} dx = \frac{32}{5} - 2 \int_0^2 x^4 \sin^2 \frac{x}{2n} dx$	2p
Avem $0 \leq x^4 \sin^2 \frac{x}{2n} \leq \frac{x^6}{4n^2}, \forall x \in [0; 2] \Rightarrow 0 \leq \int_0^2 x^4 \sin^2 \frac{x}{2n} dx \leq \frac{2^7}{28n^4}$	3p
$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 x^4 \sin^2 \frac{x}{2n} dx = 0$	1p
Obținem că există $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^2 x^4 \cos \frac{x}{n} dx = \frac{32}{5}$	1p

Enunț subiect 2, autori *Ana-Maria și Daniel Petriceanu*

Determinați toate funcțiile derivabile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică condițiile $f \in \int g(x) dx$ și $g \in \int f(x) dx$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem $f'(x) = g(x)$ și $g'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$	2p
Obținem $f'(x) + g'(x) = f(x) + g(x) \Leftrightarrow (f'(x) + g'(x))e^{-x} - (f(x) + g(x))e^{-x} = 0 \Leftrightarrow \exists c_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $(f(x) + g(x))e^{-x} = c_1 \Leftrightarrow f(x) + g(x) = c_1 e^x$	2p
Pe de altă parte avem: $f'(x) - g'(x) = g(x) - f(x) \Leftrightarrow (f'(x) - g'(x))e^x + (f(x) - g(x))e^x = 0 \Leftrightarrow \exists c_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $(f(x) - g(x))e^x = c_2 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = c_2 e^{-x}$	2p
Soluția căutată este $f(x) = \frac{c_1 e^x + c_2 e^{-x}}{2}, g(x) = \frac{c_1 e^x - c_2 e^{-x}}{2}$.	1p

Enunț subiect 3

a) autori *Costel Chiteș și Stelian Fedorca*

În inelul matricelor $(M_4(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ considerăm matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2020 & 582 & 860 & 870 \\ 1962 & 603 & 342 & 1011 \\ 3444 & 102 & 502 & 48 \\ 228 & 972 & 708 & 51 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{i,j \in \overline{1,5}}.$$

Fie $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})_{i,j \in \overline{1,5}}$ matricea A redusă modulo 5. Demonstrați că $\hat{A}$ este inversabilă și calculați inversa sa.

b) autori *Ana-Maria și Daniel Petriceanu*

Fie $A = \{x^2 - xy + 4y^2 | x, y \in \mathbb{Q}, x^2 + y^2 \neq 0\}$. Demonstrați că A este grup abelian în raport cu înmulțirea numerelor.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $\det \hat{A} = \hat{1} \neq \hat{0}$, deducem că matricea $\hat{A}$ este inversabilă.	1p
Obținem $\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{4} & \hat{4} & \hat{3} & \hat{2} \\ \hat{3} & \hat{0} & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{4} & \hat{0} & \hat{2} & \hat{4} \\ \hat{0} & \hat{3} & \hat{0} & \hat{3} \end{pmatrix}$	2p
b) Fie $u, v \in A$, atunci $u = x^2 - xy + 4y^2$ și $v = a^2 - ab + 4b^2$, $(a; b) \neq (0; 0)$ și $(x; y) \neq (0; 0)$, $x, y, a, b \in \mathbb{Q}$ Definim matricele $X = \begin{pmatrix} x & 2y \\ -2y & x - y \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -2b & a - b \end{pmatrix}$. Avem $uv = (\det X)(\det Y) = \det(XY) = (ax - 4by)^2 - (ax - 4by)(ay + bx - by) + 4(ay + bx - by)^2$ $(ax - by, ay + bx - by) \neq (0; 0)$ Deducem că $uv \in A$.	2p
Avem $\frac{1}{u} = \frac{1}{\det X} = \det X^{-1}$. Deoarece $X^{-1} = \frac{1}{\det X} \begin{pmatrix} x - y & -2y \\ 2y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m - n & -2n \\ 2n & m \end{pmatrix}$, atunci $\frac{1}{u} = m^2 - mn + 4n^2$, $(m, n) \neq (0; 0)$. Deducem că $\frac{1}{u} \in A$. Am obținut că A este subgrup al grupului $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, deci $(A; \cdot)$ este grup abelian.	2p

Enunț subiect 4, *Costel Chiteș*

Fie $A = \{f | f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continuă}\}$. Vom considera că $(A, +, \cdot)$ este inel comutativ.

- a) (3p) Demonstrați echivalența „ $f \in A$ este divizor al lui zero dacă și numai dacă există un interval nevid și deschis $I \subset [0; 1]$ pentru care $f(x) = 0, \forall x \in I$ ”
- b) (4p) În subinelul $B = \{f | f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ derivabilă}\}$ determinați o pereche de funcții $g, h \in B$, g, h neidentice nule astfel încât $g \cdot h = 0$.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) f este divizor al lui $0 \Leftrightarrow \exists g \in A$ astfel încât $g \neq 0$ și $fg = 0$. Deoarece $g \neq 0$, atunci $\exists a \in [0; 1]$ astfel încât $g(a) \neq 0$ Din continuitatea lui g rezultă că $\exists U \in V(a)$ pentru care $g(x) \neq 0 \forall x \in U \cap [0; 1]$. Am obținut că $\exists I \subset [0, 1]$, I interval deschis astfel încât $g(x) \neq 0 \forall x \in I$. Din condiția inițială rezultă $f(x) = 0, \forall x \in I$. Se construiește g pentru implicația reciprocă.	1p
b) Considerăm $0 < a < b < c < d < 1$ și $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}}, & x \in (a; b) \\ 0, & x \in [0; a] \cup [b; 1] \end{cases}$ și $h(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{(x-c)(x-d)}}, & x \in (c; d) \\ 0, & x \in [0; c] \cup [d; 1] \end{cases}$	2p
Verificăm derivabilitatea funcțiilor g, h. g este derivabilă pe $[0; 1] \setminus \{a; b\}$ și h este derivabilă pe $[0; 1] \setminus \{c; d\}$. $g'_s(a) = 0$ și $g'_d(a) = \lim_{x \searrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \searrow a} \frac{e^{\frac{1}{(x-a)(x-b)}}}{x - a} = 0$. Așadar g este derivabilă în $x = a$. Analog g este derivabilă în b și h în c și d, iar funcțiile g, h verifică condițiile cerute.	2p